

## **Vernetztes mathematisches Denken – in der Schule Anhand eines biologischen Beispiels**

### **Inhalt**

Vorbemerkung

Die Bedeutung der Linsengleichung beim Sehen mit Linsenaugen

Entfernungswahrnehmung beim Sehen

Vom Sehleck zum Linsenauge

Ausblick, was sonst noch alles möglich wäre

### **Vorbemerkung:**

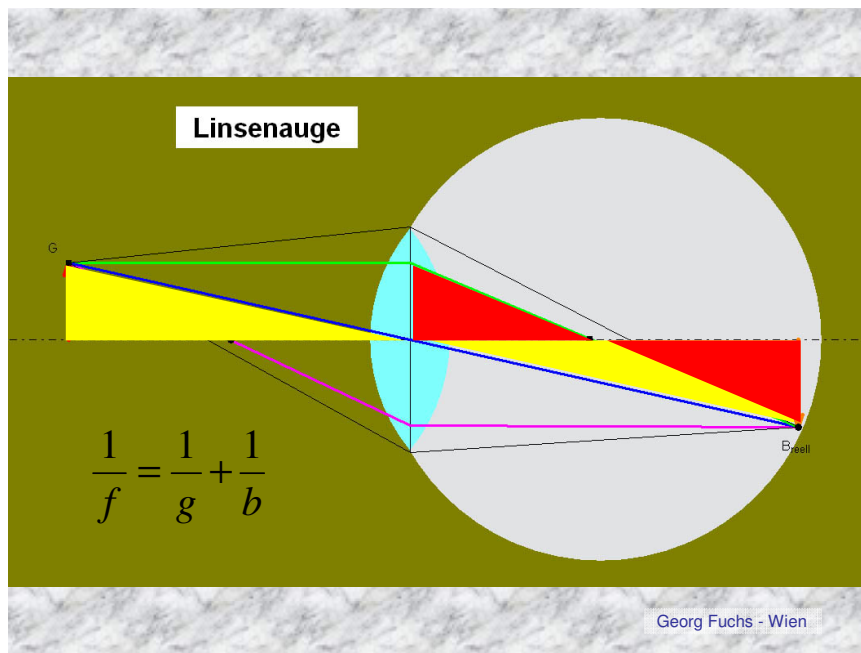
Sehr oft spielt die Mathematik im Zusammenhang mit fächerübergreifenden Projekten in der Schule eine sehr undankbare Rolle. Wen begeistert schon eine Statistik, die abschließend in einem Balkendiagramm dargestellt wird, unter Angabe der Mittelwertes, Standardabweichung etc.! Auch in anderen Zusammenhängen beschränkt sich der mathematische Inhalt oft auf die Grundrechnungsarten. Das andere Extrem ist eine angewandte Mathematik, die durch ihre Komplexität ebenfalls nur eine kleine Minderheit begeistert.

Bei einem erfolgreichen mathematischen, vernetzten Denken in der Schule geht es also darum einen geeigneten Mittelweg zu finden. Voraussetzung dafür ist, dass wir Mathematiker auf die anderen Fächer und Fachkollegen zugehen, offen sind und so mit gutem Beispiel voran gehen. Ich musste leider häufig die Erfahrung machen, dass unser Fach auch bei Kollegen einen sehr negativen Stellenwert besitzt und daher nicht erwartet werden kann, dass diesen Kollegen die mathematischen Inhalte bei irgendwelchen Projekten am Herzen liegen.

Um unserem Fach in entsprechender Weise gerecht zu werden, ist es daher notwendig, sich auch „nichtmathematisches Wissen“ (wenn es so etwas überhaupt gibt) anzueignen, um die mathematischen Inhalte in ihrer Einbettung zu erkennen und aufbereiten zu können. Dieser Gesichtspunkt ist das zentrale Anliegen dieses Vortrages.

Auch die geometrischen Inhalte sollen dabei nicht zu kurz kommen. Die gezeigten Abbildungen und Animationen wurden in einer dynamischen Geometriesoftware (Euklid-Dynageo) gestaltet und wären allesamt geeignet, von Schülern im Rahmen eines fächerübergreifenden Projektes angefertigt zu werden.

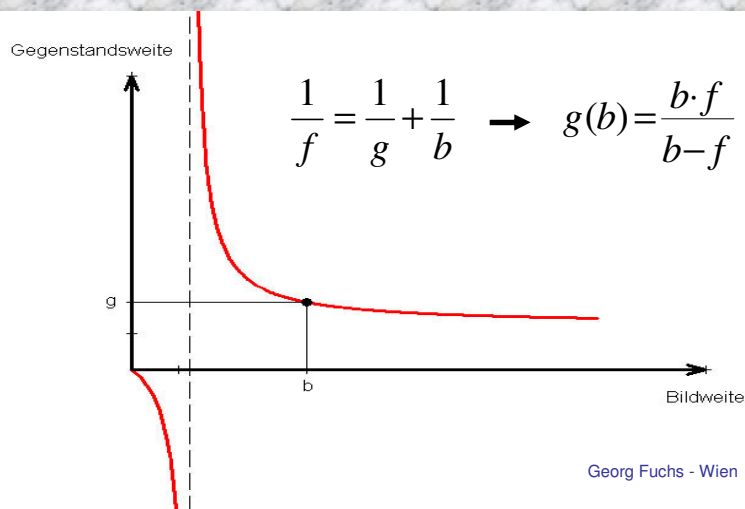
# Die Bedeutung der Linsengleichung beim Sehen mit Linsenäugen



Linsenäugen funktionieren gemäß der Linsengleichung. Bei den primitivsten Linsenäugen ist sowohl die Brennweite  $f$  als auch die Bildweite  $b$  fix. Damit kann sich das Auge nicht an verschiedene Entfernungssituationen anpassen (akkomodieren).

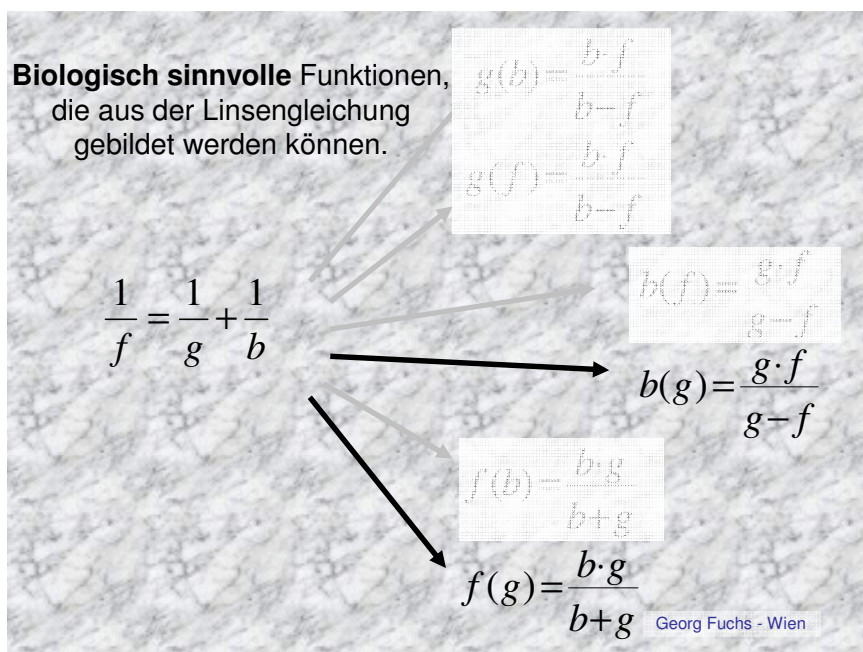


**Scharf sehen bedeutet:  
f,g und b „passen“ in die Linsengleichung.**



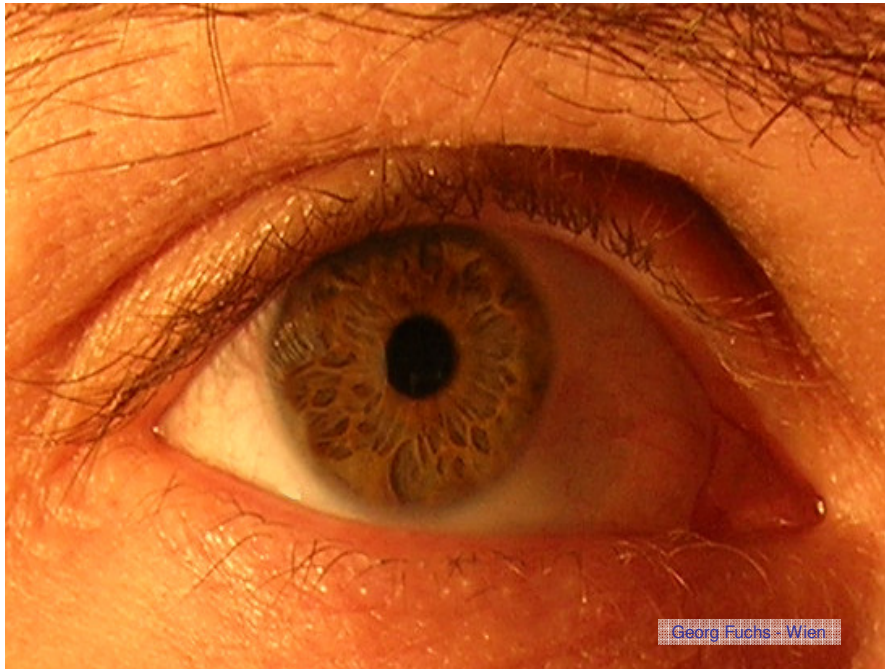
Durch explizites Ausdrücken der einzelnen Variablen kann die Linsengleichung in eine Funktionsgleichung umgeformt werden. Es handelt sich hierbei um gebrochen rationale Funktionen, wie sie beispielsweise in der 4. Klasse der AHS vorkommen. Die folgende Abbildung zeigt die möglichen Funktionen, die aus der Linsengleichung gebildet werden können.

Doch nicht alle dieser Funktionen sind biologisch sinnvoll (nicht abgesoftet). Als unabhängige Variable kommt beim realistischen Sehen nur die Gegenstandsweite  $g$  in Frage. Somit bleiben lediglich zwei sinnvolle Funktionen  $f(g)$  und  $b(g)$  übrig. D.h. dass Schärfe in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite  $g$  entweder durch Veränderung der Bildweite  $b$  oder der Brennweite  $f$  erzielt wird.

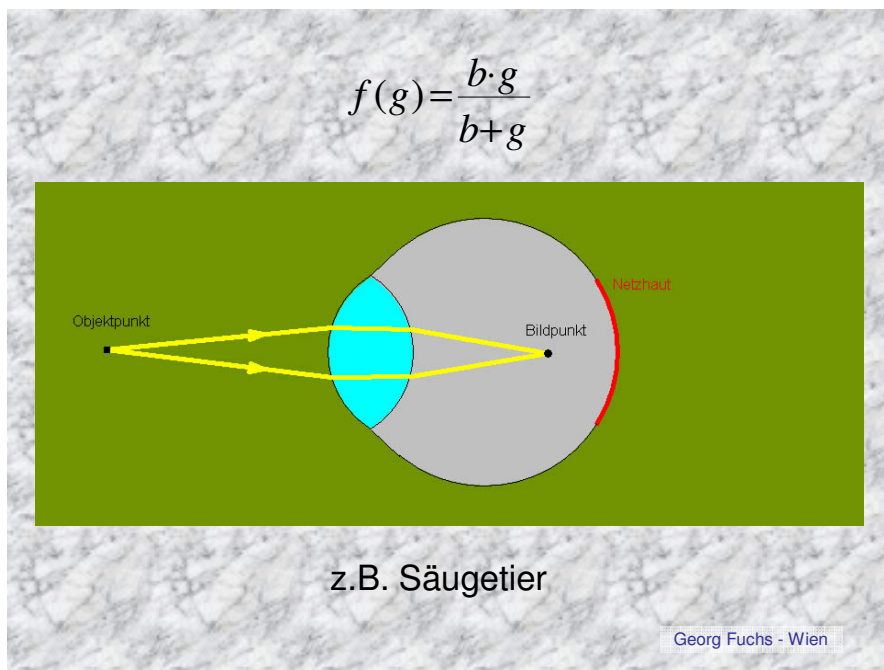


Die Natur hat dazu zahlreiche Tricks erfunden.

Beim Säugerauge wird die Brennweite der jeweiligen Gegenstandsweite angepasst.



Mathematisch bedeutet das: Die Brennweite ist eine Funktion der Gegenstandsweite. Zum Verkleinern der Brennweite zieht sich die Linse – wenn der Zillarmuskel kontrahiert – zusammen. Die Brechkraft wird also stärker.

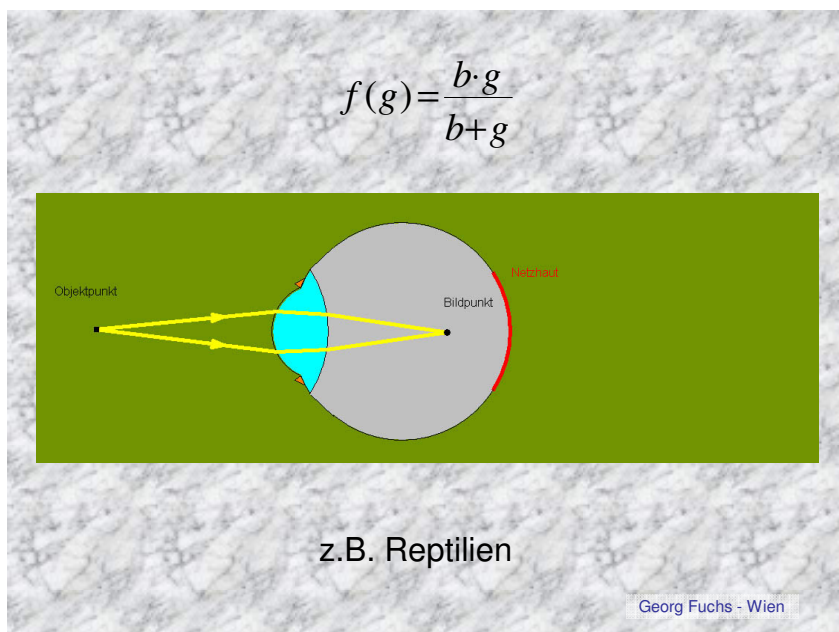




Bei Reptilien funktioniert das Verändern der Linsenkrümmung ganz anders. Durch das Nachvorschieben der Linse (Änderung der Bildweite  $b$ ) wird die Linse gegen einen ringförmigen Knochen gedrückt. Dabei beult sie sich nach vorne aus, was eine Verkleinerung von  $f$  zur Folge hat.



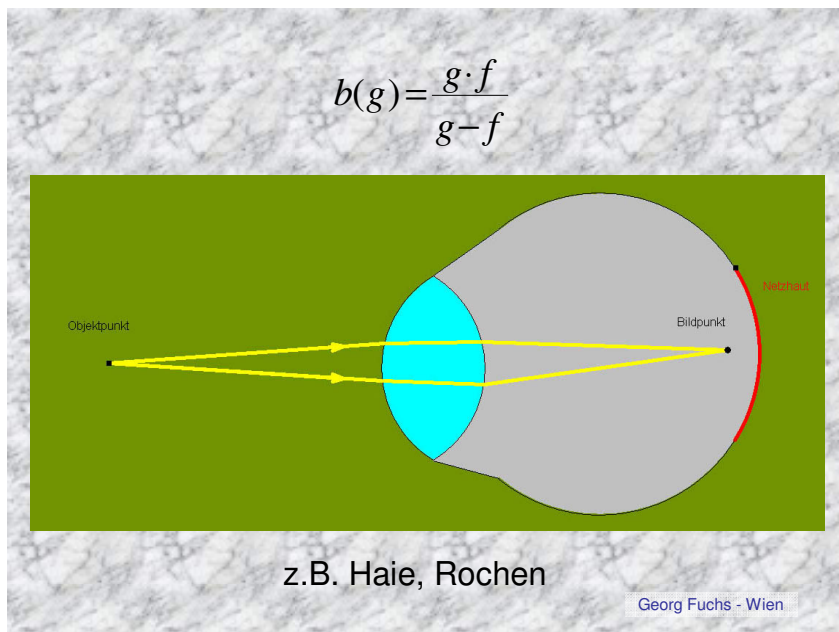
Mathematisch bedeutet das, dass die Linsengleichung durch Veränderung der Brennweite  $f$  und der Bildweite befriedigt wird.



Auch Wasservögel, die unter Wasser die Augen aufmachen, um Futter zu suchen, können eine Verkleinerung von  $f$  erzielen, indem sie die Linse nach vorne drücken.

Das ist unter Wasser nötig, da hier die Aktivität des Zillarmuskels nicht ausreicht. Es fällt ja die Brechung an der Augenoberfläche (Hornhaut) so gut wie aus.

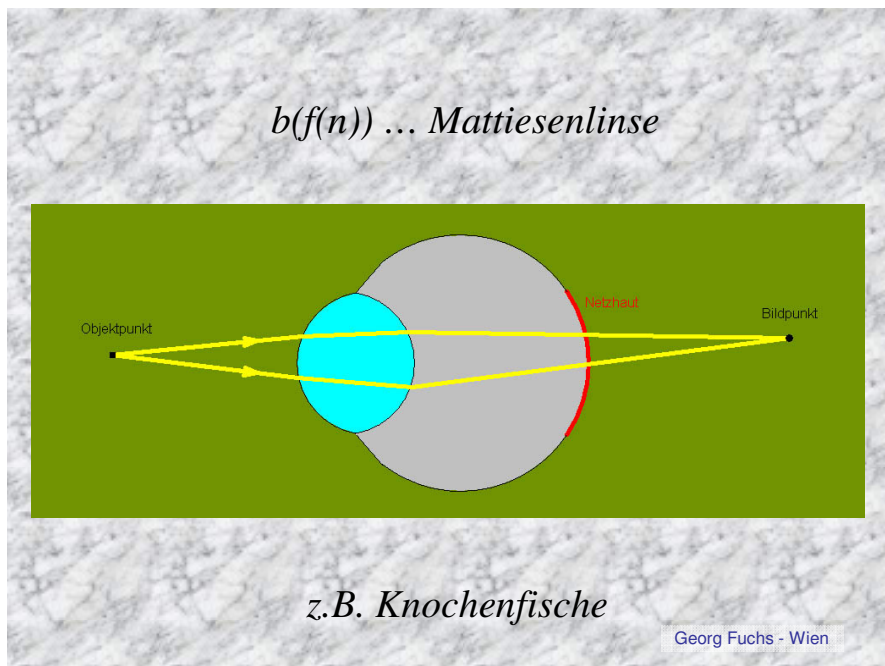
Bei Haien und Rochen wird ausschließlich die Veränderung der Bildweite durch Verschieben der Linse erreicht.



Knochenfische haben eine andere, ausgeklügelte Technik, um scharfe Bilder zu erhalten. Ein Muskel zieht die kugelförmige Linse quer zur optischen Achse zur Seite. Dadurch wird das Licht aus zwei Gründen stärker gebrochen. Erstens ist der Einfallswinkel am Rand größer und zweitens sind die äußeren Schichten der Fischlinse aus einem optisch dichteren Material aufgebaut, was ebenfalls zu einer stärkeren Brechung und somit zu einer kleineren Brennweite  $f$  führt.



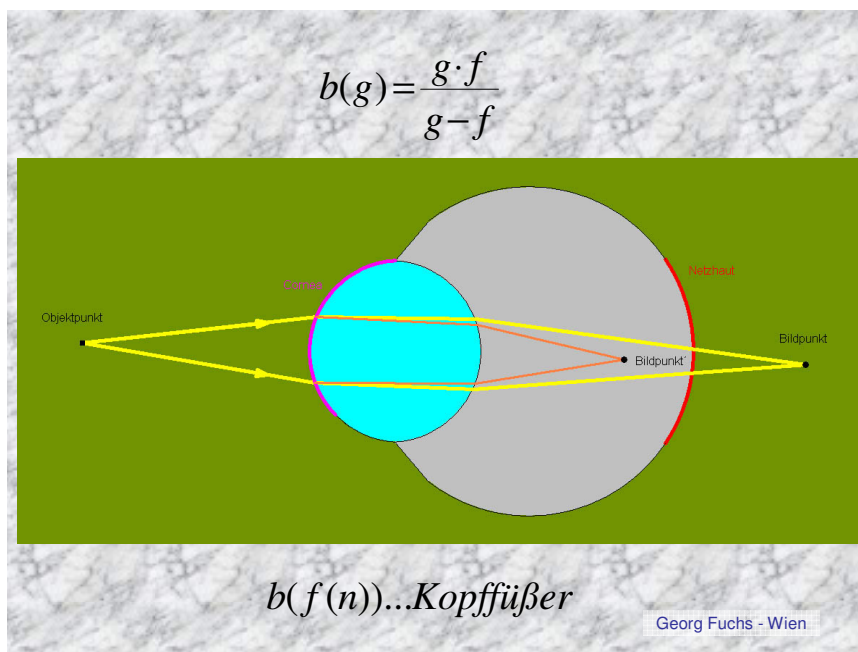
Mathematisch handelt es sich hier um eine zusammengesetzte Funktion:  $b(f(n))$ , wobei  $n$  der Brechungsindex der jeweiligen Fischlinsenschicht ist.



Bei höher entwickelten Tintenfischen gibt es noch ein eigenartiges Feature: Diese Tiere können durch Verschieben von verschiedenen Hornhäuten Schärfe erzielen.



Jeder dieser Tintenfische hat also sozusagen seine eingebaute Lese- und Weitsichtbrille immer mit dabei.

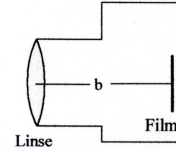


Diese Beispiele aus der Natur sind ein reiches Material als Vorlage zum Erstellen von Mathematikbeispielen. Vor einiger Zeit gab ich ein artverwandtes Beispiel zu einer Mathematikschularbeit einer 4. Klasse. In den nächsten drei Abbildungen sind die Angabe sowie mein „Lösungszettel“ zu sehen. Die Klammern beziehen sich auf die Punkte der jeweiligen Teilaufgabe. (Gesamtpunkteanzahl der Schularbeit: 24.)

## Schularbeitsbeispiel 4. Klasse

- 4) Die Linse eines Fotoapparates hat eine Brennweite von 10 cm. Wir wissen, dass der Zusammenhang zwischen Brennweite  $f$ , Bildweite  $b$  und Gegenstandsweite  $g$  durch folgende Gleichung beschrieben wird:

(Linsengleichung) 
$$\frac{1}{g} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b}$$



Drücke die Gegenstandsweite als Funktion der Bildweite aus!

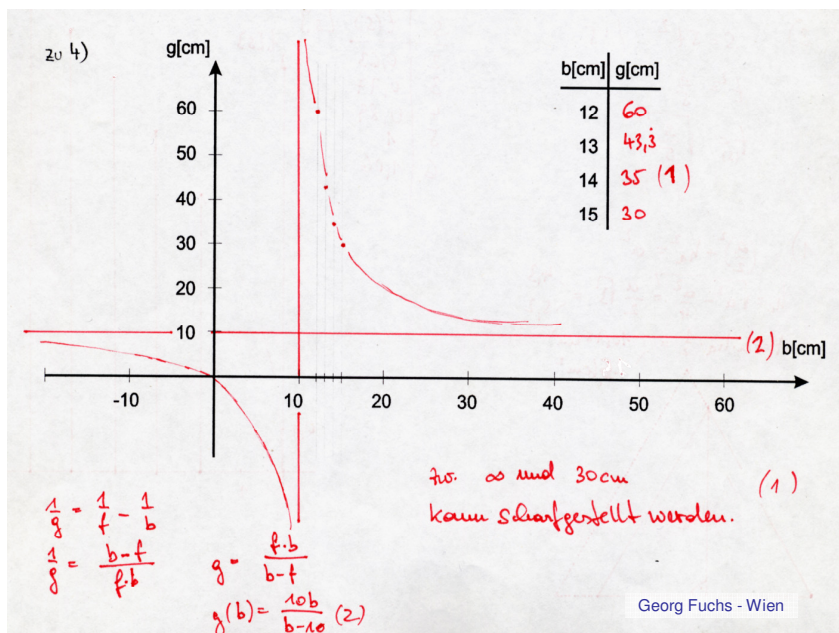
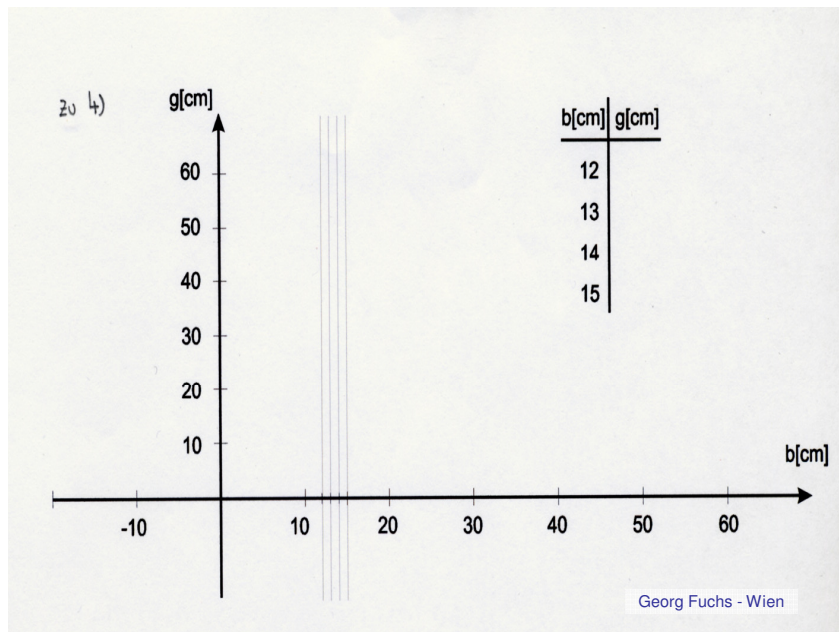
Der Abstand zwischen Linse und Film kann zum Scharfstellen zwischen 10 cm und 15 cm variiert werden. ( $10 < b < 15$ ).

Vervollständige die begonnene Wertetabelle und trage den Graph in das vorbereitete Koordinatensystem ein!

Vervollständige den Graph der gesamten Funktion! (Asymptoten!). Skizze!

Für welche Entfernungen eines Gegenstandes kann daher scharfgestellt werden?

Georg Fuchs - Wien



$$\frac{1}{g} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{g} = \frac{b-f}{fb}$$

$$g = \frac{f \cdot b}{b-f}$$

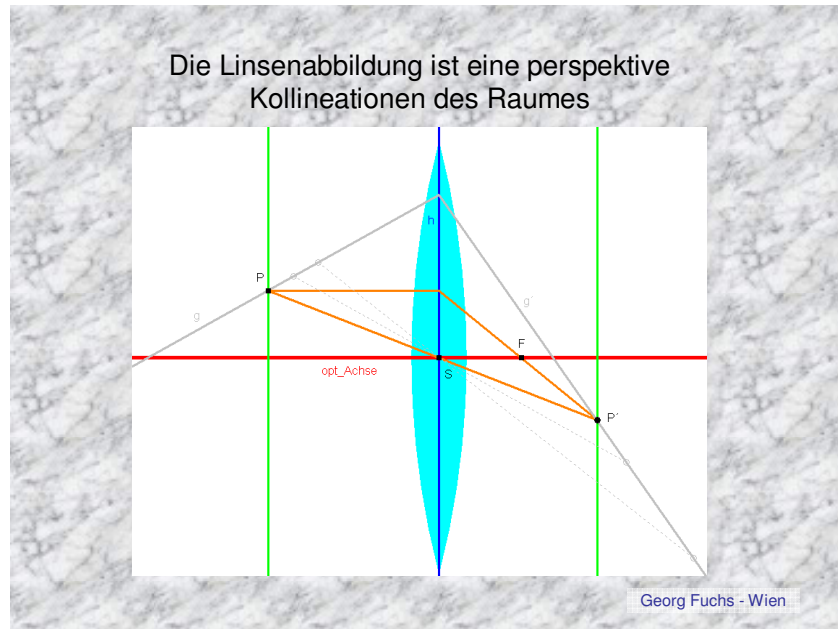
$$g(b) = \frac{10b}{b-10} \quad (2)$$



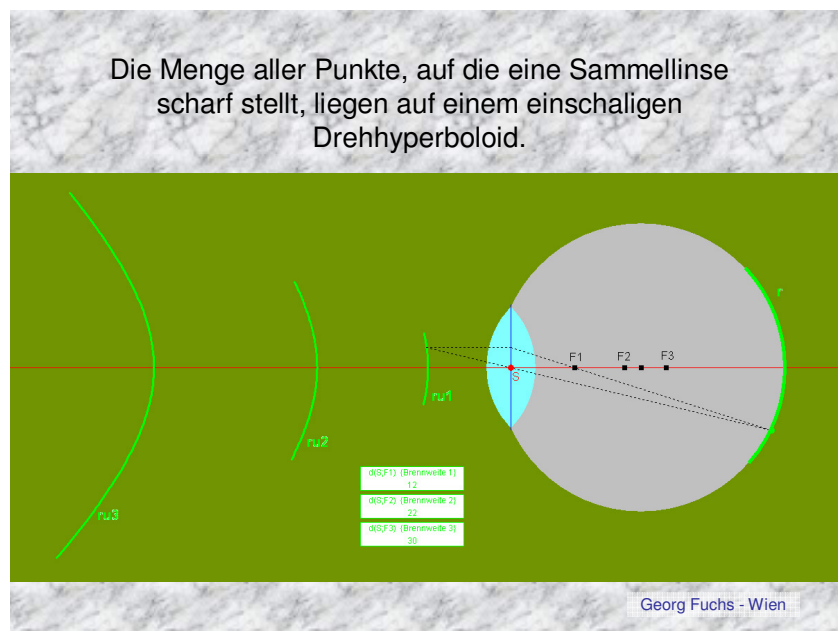
# Tiefenwahrnehmung

Obwohl die Abbildung, wie sie eine Linse vornimmt, räumlich ist, können nur ganz wenige Lebewesen diese Tiefeninformation auswerten.

Vom geometrisch – mathematischen Standpunkt handelt es sich um räumliche Kollineationen.

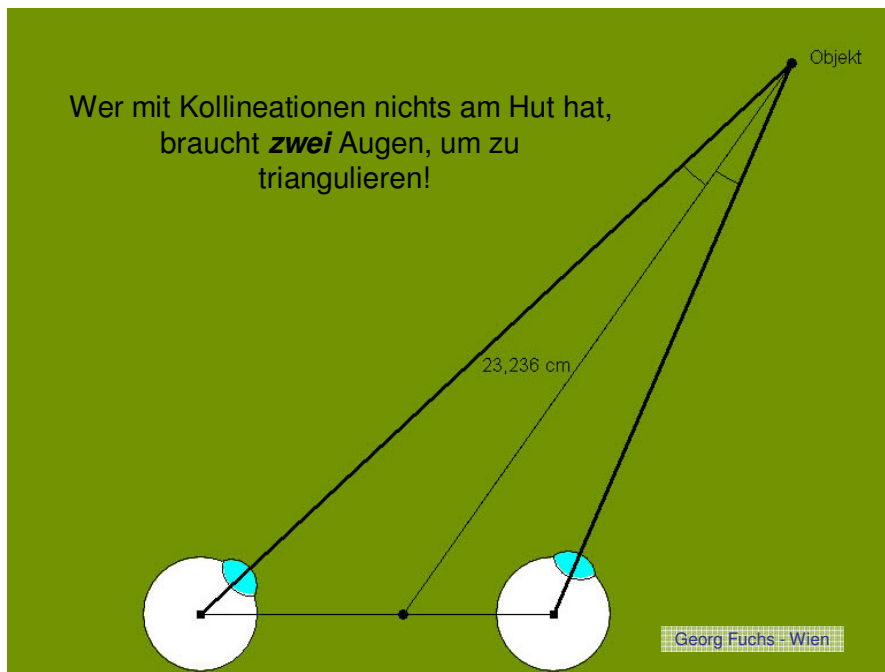


Mit dieser Information kann man Folgendes herausfinden:



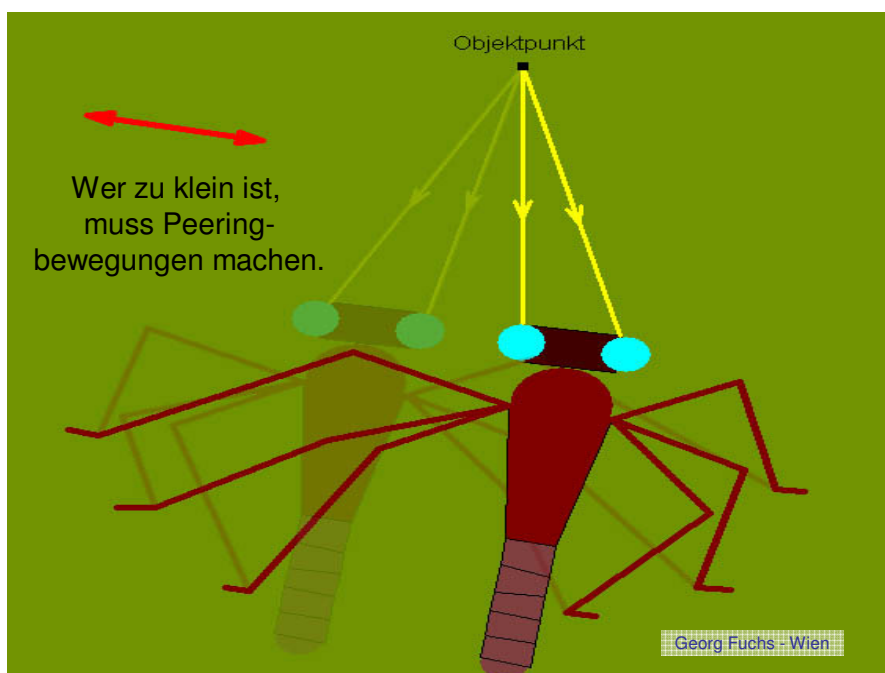
Das Chamäleon ist im Stande aus der Linsenstellung die Tiefeninformation „herauszurechnen“. Damit schafft es dieses Tier, Entfernungen zu Objekten, die es mit nur einem Auge anvisiert, wahrzunehmen.

Die meisten Lebewesen beherrschen diese Technik nicht und sind auf andere „Tricks“ angewiesen.



Auch das bietet Gelegenheit für realistische Anwendungsbeispiele.

Bei zu kleinem Augenabstand ist die Parallaxe nicht ausreichend groß. Daher ist das einfache Triangulieren zu ungenau. Gottesanbeterinnen machen daher beim Anvisieren ihrer Beute eine seitliche Hin- und Herbewegung um so die Parallaxe zu vergrößern.

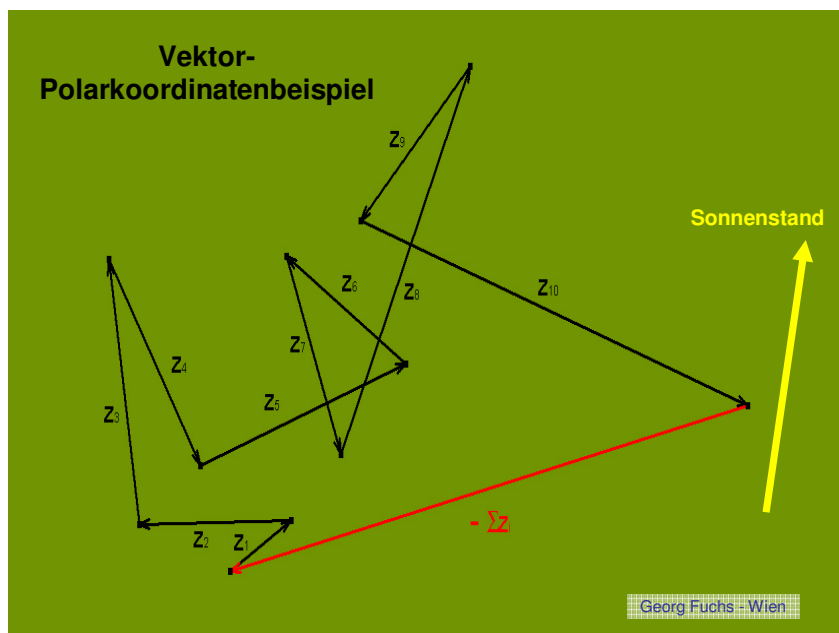


Auch Spinnen machen zur Entfernungsabschätzung Seitwärtsbewegungen. Allerdings beobachten sie dabei nicht die Parallaxen sondern Musterverschiebungen des Hintergrundes im Vergleich zu Vordergrundobjekten.

Zur Orientierung im Gelände haben manche Spinnen, die am Boden leben, eine eigene Technik. Von den zahlreichen Linsenaugen, die diese Spinnen besitzen, ist ein Paar, das relativ weit hinten sitzt und nach oben ausgerichtet ist, als „Kompassaugen“ konzipiert. Diese Augen analysieren die Polarisationsrichtung des blauen Himmelslichtes.



Damit können diese Spinnen ihre Teilwegstücke, die sie im Gelände zurücklegen, in „Vektor-Polarform“ abspeichern. Wenn Gefahr droht und sie den kürzesten Weg „nach Hause“ laufen wollen, müssen sie sich nur in Richtung des negativen Summenvektors bewegen. Die Spinnengehirne haben offenbar eine „Vektorrechnungsabteilung“.



## Vom Sehleck zum Linsenauge

Am Beginn der Entwicklung des Sehens steht der Hautlichtsinn, wie man ihn etwa beim Regenwurm findet. Damit ist es diesem Lebewesen lediglich möglich zu erkennen, ob es beispielsweise direkter Sonnenbestrahlung ausgesetzt ist und ob es sich somit in unmittelbarer Gefahr befindet, gefressen zu werden. Diese Art der Lichtwahrnehmung lässt sich mit der Wahrnehmung von Wärmestrahlung beim Menschen vergleichen.

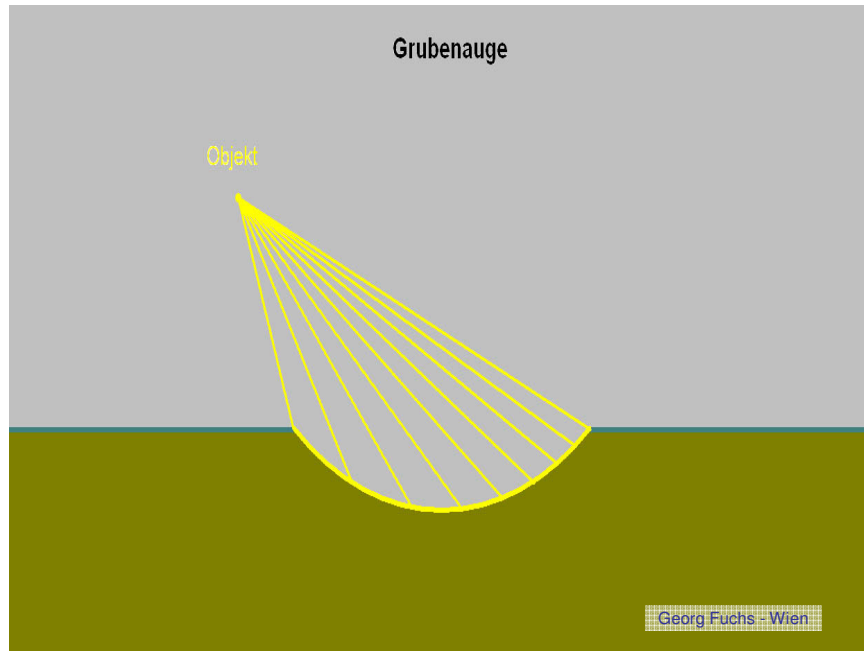


Der Sehleck, wie er beispielsweise bei Quallen (Abb.3) beobachtet werden kann, ist eine mehr oder weniger ebene Schicht, die in hoher Dichte von optisch sensiblen Sinneszellen durchsetzt ist. Dieser Sehleck ermöglicht dem Lebewesen ein primitives Helligkeitssehen. Durch die Lage des Sehlecks kann grob erkannt werden, aus welcher Richtung das wahrgenommene Licht kommt.





Im Laufe der Evolution buchtete sich der Sehleck mehr und mehr zu einer Grube ein. Eine Motivation dafür dürfte der Schutz vor Verletzungen dieser empfindlichen Zellen gewesen sein. Dieses Grubenaug findet man beispielsweise bei primitiven Schnecken (Napfschnecke). Die Lebewesen, die mit diesem Augtyp ausgestattet sind, verfügen über ein einfach entwickeltes Richtungssehen; d.h. sie können grob feststellen aus welcher Richtung das einfallende Licht kommt.



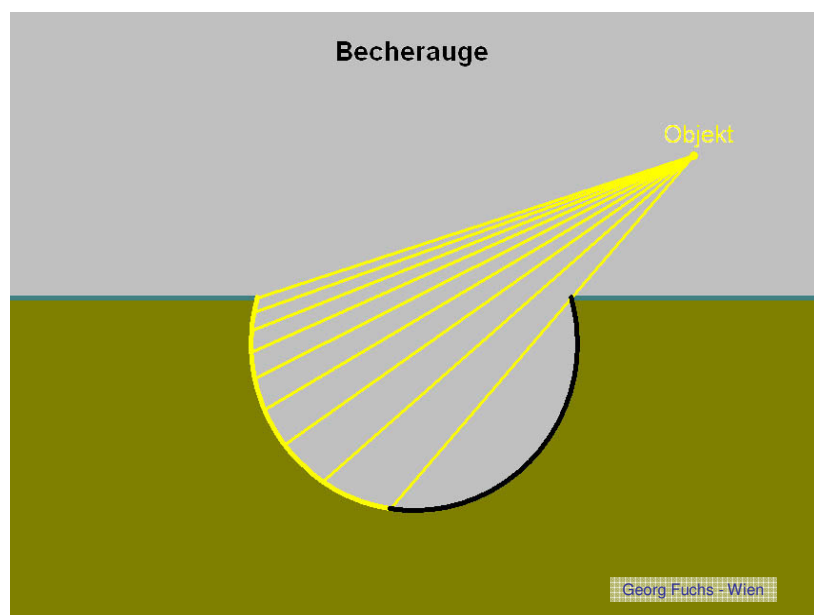
Das Konzept dieses Augtyps wurde in der Evolution sogar bei Wirbeltieren erneut aufgenommen, nur diesmal nicht mit sichtbarem Licht, sondern im Infrarotbereich. Die Familie der Grubenottern besitzt das so genannte Grubenorgan, das einem Becherauge entspricht, welches mit Wärmestrahlung „betrieben“ wird. In der Grubenmembran sitzen die infrarotsensiblen Zellen.



Es ist diesen Schlangen möglich, ihre Beutetiere, die sich als Warmblüter temperaturmäßig von ihrer Umgebung unterscheiden, schemenhaft wahrzunehmen. Übrigens gehört die Klapperschlange auch dieser Familie der Grubenottern an.



Die konsequente Weiterentwicklung des Grubenauges erfolgte durch Ausbildung einer becherförmigen Vertiefung. Durch den Schlagschatten der Becheröffnung kommt zum Richtungssehen noch die Fähigkeit des Bewegungssehens hinzu.



Den Abschluss dieser Einbuchtungstendenz vom Sehleck zum Becherauge bildet das Blasenauge. Hier fällt das Licht durch eine kleine Öffnung in das Innere des Auges ein. Höhere Schnecken und bestimmte Tintenfischarten besitzen diesen Augentyp. Der Vorteil im Vergleich zu den bisher erwähnten Augtypen ist, dass zusätzlich eine Gestaltwahrnehmung möglich ist. Das Prinzip ist mit dem einer Camera obscura vergleichbar. Man könnte diesen Entwicklungsschritt als die Geburtsstunde der Zentralprojektion bezeichnen.

Der Augpunkt liegt in der kleinen Öffnung durch den das Licht einfällt. Die Innenseite des Blasenauges entspricht der Bildfläche der Zentralprojektion. Auf ihr werden Objekte verkehrt abgebildet. Es handelt sich hier also um eine – entsprechend der Blasenform – mehr oder weniger sphärische Zentralprojektion.

